4.3.5 Základní goniometrické vzorce I

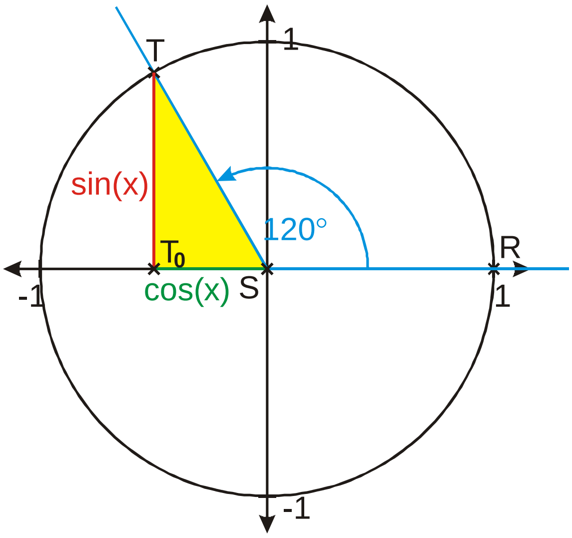
Předpoklady: 040302

Pedagogická poznámka: Napíšeme si větu, chviličku nechám žáky přemýšlet nad důkazem, pak jim ukážu obrázek, pak dopíšu do vzorce druhou mocninu k jedničce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1^2$ a tím postupně zvětšuji počet těch, kteří na důkaz samostatně přijdou. Žáci, kteří důkaz vymyslí, mohou počítat příklady.

Dva vzorce, oba známe už z prváku.

Pro každé $x \in R$ **platí:** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Důkaz: Použijeme definici obou funkcí v jednotkové kružnici:



Obě funkce jsou souřadnicemi bodu T na jednotkové kružnici $\Rightarrow$ body STT_0 tvoří pravoúhlý trojúhelník $\Rightarrow$ platí Pythagorova věta $|ST_0|^2 + |T_0T|^2 = |ST|^2 = 1$ (bod T leží na jednotkové kružnici).

Př. 1: Urči, kdy je definován výraz $\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, a pak jej zjednoduš.

Definiční obor: Musí být definovány všechny funkce ve výrazu :

- $\operatorname{tg} x$ není definován pro $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
- $\operatorname{cotg} x$ není definován pro $x = 0 + k \cdot \pi$,

$\Rightarrow$ musíme vyloučit $x \neq \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; 0 + k \cdot \pi \right\} = \bigcup_{k \in Z} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$.

Žádné další hodnoty x vyloučit nemusíme, protože ve jmenovateli zlomku je součet druhé mocniny a jedničky, tedy číslo vždy kladné.

Použijeme $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$´, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, upravujeme výraz:

$$\frac{1+\mathrm{cotg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\mathrm{cotg}^2 x$$

Př. 2: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě *x*, jestliže platí $\sin x=\frac{3}{5}$ a zároveň $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Hodnotu $\cos x$ určíme ze vzorce: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$|\cos x|=\sqrt{1-\sin^2 x}$ (protože $\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|$)

$$|\cos x|=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$\cos x$ je v intervalu $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ záporný $\Rightarrow$ $\cos x=-\frac{4}{5}$.

Hodnoty ostatních funkcí zjistíme s definičních vztahů:

$$\mathrm{tg}\, x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4} \qquad \mathrm{cotg}\, x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.$$

Pedagogická poznámka: Téměř všichni zjistí, že $\cos x=\frac{4}{5}$, nejdřív jen upozorňuji, že výsledek není správný, potom, že nevyužili všechny informace ze zadání.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je synchronizační, pomalejší část třídy ho ani nestihne začít. Na zbytek hodiny je třeba minimálně 25 minut.

Př. 3: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě *x*, jestliže platí $\cos x=-\frac{1}{3}$ a zároveň $\sin x<0$. Rozhodni, do kterého z intervalů $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$ a $\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$ náleží úhel *x*.

Hodnotu $\sin x$ určíme ze vzorce: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$

$|\sin x|=\sqrt{1-\cos^2 x}$ (protože $\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$)

$$|\sin x|=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin x=-\frac{2\sqrt{2}}{3} \ (\sin x<0)$$

Hodnoty ostatních funkcí zjistíme s definičních vztahů:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Protože hodnoty $\sin x$ i $\cos x$ jsou záporné, leží koncové rameno orientovaného úhlu x ve třetím kvadrantu a platí tedy $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi \right)$.

Druhý vzorec:

Pro každé $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$ platí: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Vzorec se používá i v jiných tvarech: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$ nebo $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$..

Př. 4: Vysvětli, proč je ve vzorci $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ uvedena podmínka $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$.

Jak jsme zjistili při řešení příkladu 3, pro $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$ není vždy jedna z obou funkcí $\operatorname{tg} x$ nebo $\operatorname{cotg} x$ definována $\Rightarrow$ nemá smysl uvažovat o platnosti vztahu $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Př. 5: Dokaž platnost vztahu $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Dosadíme: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \frac{\cos x}{\sin x} = 1$$

$$1 = 1$$

Př. 6: Zjednoduš výraz $\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ pomocí vzorce $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

$$\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\frac{1}{\operatorname{cotg}^2 x}} = \frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{\frac{\operatorname{cotg}^2 x+1}{\operatorname{cotg}^2 x}} = \frac{\operatorname{cotg}^2 x\left(1+\operatorname{cotg}^2 x\right)}{\operatorname{cotg}^2 x+1} = \operatorname{cotg}^2 x$$

Př. 7: Odhadni výsledek, který vznikne zjednodušením výrazu $\frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{cotg}^2 x}$. Odhad potvrď výpočtem.

$$\frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{cotg}^2 x}=\frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}}=\frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\frac{\mathrm{tg}^2 x+1}{\mathrm{tg}^2 x}}=\frac{\mathrm{tg}^2 x\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)}{\mathrm{tg}^2 x+1}=\mathrm{tg}^2 x$$

Umíme určit hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě *x*, pokud známe hodnotu $\sin x$ nebo $\cos x$ a znaménko druhé funkce (případně interval). Dokážeme určit hodnoty i v případě, že budeme znát hodnoty $\mathrm{tg}\, x$ ($\mathrm{cotg}\, x$)?

Zkusíme určit hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě *x*, jestliže platí $\mathrm{tg}\, x=-2$ a zároveň $x\in\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$.

Snadno určíme $\mathrm{cotg}\, x$: $\mathrm{tg}\, x\cdot\mathrm{cotg}\, x=1 \Rightarrow \mathrm{cotg}\, x=\frac{1}{\mathrm{tg}\, x}=-\frac{1}{2}$.

Hodnoty dalších funkcí: vztahy $\mathrm{tg}\, x=\frac{\sin x}{\cos x}=-2$ i $\mathrm{cotg}\, x=\frac{\cos x}{\sin x}=-\frac{1}{2} \Rightarrow$
z obou vztahů získáme rovnici: $\sin x=-2\cos x \Rightarrow$ nevede k cíli (1 rovnice na dvě neznámé) $\Rightarrow$ musíme přidat další rovnici $\Rightarrow$ použijeme $\cos^2 x+\sin^2 x=1 \Rightarrow$ 2 rovnice na dvě neznámé.

Rychlejší postup: $\cos^2 x+\sin^2 x=1 \qquad /:\cos^2 x$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1+\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1}{1+\left(-2\right)^2}=\frac{1}{5} \Rightarrow \left|\cos x\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

V intervalu $\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$ jsou hodnoty $\cos x$ kladné $\Rightarrow$ $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\mathrm{tg}\, x=\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x=\cos x\cdot\mathrm{tg}\, x=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(-2\right)$$

$$\sin x=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí postup ukážu studentům rychle na tabuli s tím, že si jej nemají opisovat. Postup si zachytí do sešitu při řešení následujícího příkladu (který je velmi podobný). Při jeho řešení nechávám předchozí postup na tabuli.

Př. 8: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě *x*, jestliže platí $\operatorname{cotg} x = \sqrt{2}$ a zároveň $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Podobný postup jako výše:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad / : \sin^2 x$ (potřebujeme získat zlomek $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$)

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow |\sin x| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

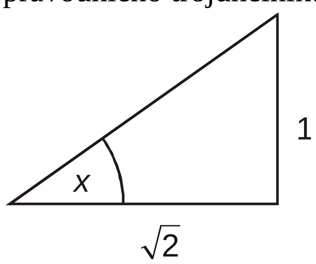
V intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ jsou hodnoty $\sin x$ kladné $\Rightarrow$ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cos x = \sin x \cdot \operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Př. 9: Vyřeš předchozí příklad pomocí pravoúhlého trojúhelníku s vhodně zvolenými délkami stran.

Pro $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ jsou hodnoty všech goniometrických funkcí kladné.

Platí: $\operatorname{cotg} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ poměr odvěsen pravoúhlého trojúhelníku $\operatorname{cotg} x = \frac{\textit{přilehlá}}{\textit{protilehlá}}$ s úhlem x je $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ hodnoty goniometrických funkcí můžeme určovat například z následujícího pravoúhlého trojúhelníku:



Délka přepony: $c^2 = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

Hodnoty zbývajících goniometrických funkcí:

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Pedagogická poznámka: Postup z příkladu 9 je sice méně elegantní a exaktní, ale pro většinu studentů snáze přijatelný. Ve skutečnosti si podobný trojúhelník můžeme nakreslit i pro úhly se základní velikostí mimo interval $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Z pravoúhlého trojúhelníku si určíme absolutní hodnoty hodnot goniometrických funkcí a znaménka zjistíme z polohy koncového ramene úhlu.

Př. 10: Petáková: strana 44, cvičení 45 c)

Shrnutí: Platí $\sin^2 + \cos^2 x = 1$ (pravoúhlý trojúhelník) a $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ (definice).